Einige Bemerkungen zu Herrn Dr. J. Stefan's Abhandlung: Über die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes.

Von **Dr. Victor v. Lang.**

(Vorgetragen in der Sitzung vom 16. December 1858.)

Die Differentialgleichung der transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes liefert bekanntlich ein Integral, worin sechs Constanten auftreten; vier derselben bestimmen sich sehr leicht aus den Bedingungen, denen der Anfang und das Ende des Stabes unterworfen sind. Die Werthermittelung der beiden übrigen Constanten hingegen, welche durch den Zustand des Stabes bei dem Anfange der Schwingungen bestimmt werden, erfordert zuerst den Nachweis, dass ein Ausdruck, von der Form $\int_0^l X_r X_s dx$ nur einen von der Nulle verschiedenen Werth hat, wenn r gleich s ist. Der Beweis hiefür wurde zuerst von Poisson auf indirectem Wege geliefert. Herr Dr. J. Stefan gibt nun in einer Abhandlung, Sitzb. Bd. XXXII, S. 207, zwei Methoden an, um direct zu demselben Ziele zu gelangen.

Die erste Methode besteht darin, dass beide Summen X_r und X_s wirklich multiplicirt und dann Glied für Glied nach bekannten Formeln integrirt werden. Die Substitution von $x = 0$ und $x = l$ bringt alsdann den Ausdruck $\int_0^l X_r X_s\, dx$ wirklich zum Verschwinden.

Herr Stefan geht hierauf zu der zweiten Methode über. In Betreff derselben sagt er auf Seite 223:

„Ich bemerke hier, dass man zu diesem Resultate auch noch auf einem anderen ebenfalls directen Wege gelangen könne, nämlich auf dem Wege der Integratio per partes, indem man die allgemeine Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

auf das untersuchte Integral $\int X_r X_s$ anwendet.“

Derselbe Weg wurde auch von mir in einem kleinen Aufsatze eingeschlagen, den ich schon vor anderthalb Jahren Herrn Professor Petzval vorlegte, und welcher später in Poggendorff's Annalen Bd. CIII, S. 624 erschien. Ich habe daselbst auch ferner gezeigt, dass der Ausdruck $\int_0^l X_r X_s\, dx$ für den speciellen Fall, dass $r = s$ ist, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, deren wahren Werth man leicht durch Differentiation ermitteln könnte. Herr Stefan hingegen sagt S. 21:

„Man sieht, für den Fall dass $s = r$ ist, wird der erste Factor in der Gleichung (28) der Nulle gleich und es kann der zweite Factor $\int_0^l X_r^2\, dx$ von der Nulle verschieden bleiben und wird es offenbar auch, da er eine Summe von lauter positiven Gliedern darstellt. Man sieht aber zugleich, dass auf diesem Wege die wirkliche Auswerthung des Integrales $\int_0^l X_r^2\, dx$ nicht erreicht werden kann, wohl aber gelingt sie nach der Methode, nach welcher das Integral $\int_0^l X_r X_s\, dx$ bestimmt wurde und in dem Folgenden mag sie geliefert werden."

Ich werde aber in dem Folgenden zeigen, dass die Auswerthung des obigen Integrals auch nach meiner Methode gelingt und zwar, wie ich glaube, bei weitem kürzer.

Die Differentialgleichung der transversalen Schwingungen elastischer Stäbe liefert unter der Voraussetzung eines periodischen Schwingungszustandes das Integral

(1) $y = \Sigma\, [X_r\, (A_r \cos ab_r{}^2\, t + B_r \sin ab_r{}^2\, t)]$ worin

(2) $X_r = G_r e^{b_r x} + H_r e^{-b_r x} + J_r \cos b_r x + K_r \sin b_s x$

Nimmt man an, dass der Stab an seinen beiden Enden frei sei, so hat man für $x = o$ und $x = l$ die Bedingungen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

Indem man die einfachsten Schwingungsweisen sucht, nimmt man an, dass jedes einzelne Glied der obigen Summe dieser Bedingungen Genüge leiste. Man hat daher für $x = o$ und $x = l$

$$\frac{d^2X_r}{dx^2} = \frac{d^3X_r}{dx^3} = 0 \tag{3}$$

Führt man die Differentiationen und die nachherige Substitution für x wirklich aus, so erhält man

$$J_r = G_r + H_r\,,\; K_r = G_r - H_r \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} G_r e^{b_r l} + H_r e^{-b_r l} - J_r \cos b_r l - K_r \sin b_r l = 0 \\ G_r e^{b_r l} - H_r e^{-b_r l} + J_r \sin b_r l - K_r \cos b_r l = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Gleichungen, welche zur Bestimmung der vier Constanten nicht hinreichen, geben die Bedingungsgleichung für b_r

$$(e^{b_r l} + e^{-b_r l}) \cos b_r l - 2 = 0 \tag{6}$$

hieraus leitet man leicht die neue Gleichung ab

$$e^{b_r l} = \frac{1 \pm \sin b_r l}{\cos b_r l} \tag{7}$$

Aus den Gleichungen 5) erhält man

$$\frac{G_r}{H_r} = \frac{-e^{-b_r l} + \cos b_r l - \sin b_r l}{e^{b_r l} \quad - \cos b_r l - \sin b_r l} = \frac{e^{-b_r l} - \cos b_r l - \sin b_r l}{e^{b_r l} \quad - \cos b_r l + \sin b_r l}$$

Hieraus erhält man durch Addition der Zähler und Nenner

$$\frac{G_r}{H_r} = \frac{-\sin b_r l}{e^{b_r l} - \cos b_r l} = \frac{-\cos b_r l}{\sin b_r l \pm 1} \tag{8}$$

Unbeschadet der Allgemeinheit, da die Constanten A_r und B_r noch unbestimmt sind, kann man setzen

$$G_r = -e^{-b_r l} + \cos b_r l - \sin b_r l\,, \qquad H_r = e^{b_r l} - \cos b_r l - \sin b_r l \tag{9}$$

Die Constanten A_r und B_r bestimmen sich aus den Bedingungen für den Anfangszustand. Es sei für $t = 0$

$$y = f(x)\,,\; \frac{dy}{dt} = F(x)$$

Die Substitution ausgeführt gibt

$$\Sigma\,[A_r X_r] = f(x), \quad \Sigma\,[a\, b_r^2\, B_r X_r] = F(x)$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichungen mit $X_r dx$ und integrirt hierauf von o bis l, so hat man unter der Voraussetzung, dass $\int\limits_o X_r X_s dx$ verschwinde, für verschiedene r und s, zur Bestimmung von A_r und B_r die Gleichungen

$$(10)\left\{\begin{aligned} A_r \int_o^l X_r^2\, dx &= \int_o^l f(x)\, X_r dx \\ ab_r^2 B_r \int_o^l X_r^2\, dx &= \int_o^l F(x)\, X_r dx \end{aligned}\right.$$

Dass aber der Ausdruck $\int\limits_o^l X_r X_r dx$ für $r \lessgtr s$ wirklich verschwindet, wird folgendermassen bewiesen. Von einer ähnlichen Bezeichnung, wie Herr Stefan Gebrauch machend, sei

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dX_r}{dx} = b_r\; X_r^{(\mathrm{I})} & \int X_r dx \quad = \dfrac{1}{b^r} X_r^{(1)} \\ \dfrac{d^2X_r}{dx^2} = b_r^{\,2} X_r^{(\mathrm{II})} & \int X_r^{(1)} \quad dx = \dfrac{1}{b^2} X_r^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d_n X_r}{dx^n} = b_r^{\,n} X_r^{(N)} & \int X_r^{(n-1)} dx = \dfrac{1}{b^r} X_r^{(n)} \end{array}$$

Da sich nun in dem ersten Theile der Gleichung 2) die Functionen von x und ihre Vorzeichen durch viermaliges Differenziren oder Integriren nicht geändert werden, so überzeugt man sich leicht von den Gleichungen

$$X_r^{(N)} = X_r^{(N-\mathrm{IV})};\; X_r^{(n)} = X_r^{(n-4)}$$

hat man $n = N < 5$, so ist

$$(11) \qquad X_r^{(4)} = X_r^{(\mathrm{IV}-N)}$$

und es ist nach Gleichung 3) für $x = 0$ und $x = l$

$$(12)\left\{\begin{aligned} &X_r^{(\mathrm{II})} = X_r^{(\mathrm{III})} = 0 \text{ und ebenso} \\ &X_s^{(\mathrm{II})} = X_s^{(\mathrm{III})} = 0 \end{aligned}\right.$$

Durch viermalige Anwendung der Integratio per partes findet man alsdann

$$\int X_r X_s\, dx = \frac{1}{b_s} X_r X_s^{(1)} - \frac{b_r}{b_s^2} X_r^{(\mathrm{I})} \ X_s^{(2)} + \frac{b_r^2}{b_s^3} X_r^{(\mathrm{II})} \ X_s^{(3)} -$$
$$- \frac{b_r^3}{b_s^4} X_r^{(\mathrm{III})} \ X_s^{(4)} + \frac{b_r^4}{b_s^4} \int X_r^{(\mathrm{IV})} \ X_s^{(4)}\, dx$$

Mit Hilfe der Gleichung 11) ergibt sich hieraus

$$\int X_r X_s\, d\alpha = \frac{1}{b_s^4 - b_r^4} \Big(b_s^3 X_r X_s^{(\mathrm{III})} - b_r b_s^2 X_r^{(\mathrm{I})} X_s^{(\mathrm{II})} + b_r b_s^2 X_r^{(\mathrm{II})} X_s^{(\mathrm{I})} - b_r^3 X_r^{\mathrm{III}} X_s \Big) \tag{13}$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und l, so reducirt sich der Werth desselben nach den Gleichungen 12) auf Null; es ist somit, was zu beweisen war

$$\int_0^l X_r X_s\, dx = 0 \tag{14}$$

In dem Falle jedoch, von $b_s = b_r$ also auch $X_r = X_s$ ist, findet man aus Gleichung 13)

$$\int X_r^2\, dx = \frac{0}{0}$$

Um den wahren Werth dieser unbestimmten Form zu finden, hat man also in Gleichung 13) Zähler und Nenner nach b_s (oder nach b_r) zu differenziren. Bei diesem Differenziren müssen die in X_s erscheinenden Coëfficienten $G_s \ldots K_s$, da sie auch von b_r abhängen, berücksichtiget werden. Bezeichnet man mit $\overline{X}_s^{(N)}$ den Ausdruck $X_s^{(N)}$ worin blos die Coëfficiente $G_s \ldots K_s$ nach b_s differenzirt wurde, so kann man setzen

$$\frac{d X_s^{(N)}}{d b_s} = x\, X_s^{(N+1)} + \overline{X}_s^{(N)}$$

und hat also

$$\int X \quad d^2 x = \frac{1}{4 b_s^3} \Big(x b_s^3 X_r X_s - x b_r b_s^2 X^{(I)} X_s^{(III)} + x b_s b_r^2 X_r^{(II)} X_s^{(II)}$$
$$- x b_r^2 X_r^{(III)} X_s^{(I)} + b_s^3 X_r \overline{X}_s^{(III)} - b_r b_s^2 X_r^{(I)} \overline{X}_s^{(II)} + b_r b_s^2 X_r^{(II)} \overline{X}_s^{(I)}$$
$$- b_r^3 X_r^{III} \overline{X}_s + 3 b_s^2 X_r X_s^{(III)} - 2 b_s b_r X_r^{(I)} X_s^{(II)} + b_r^2 X_r^{(II)} X^{(II)} \Big)_{r=s}$$

Setzt man nun in dem zweiten Theile dieser Gleichung wirklich $r = s$, so hat man

$$\int X_r^2 dx = \frac{1}{4 b_r^3} \Big(x b_r^3 X_r^2 - 2 x b_r^2 X_r^{(I)} X_r^{(III)} + x b_r^3 X_r^{(II)} X_r^{(II)}$$
$$+ b_r^3 X_r \overline{X}_r^{(III)} - b_r^3 X_r^{(I)} \overline{X}_r^{(II)} + b_r^3 X_r^{(II)} \overline{X}_r^{(I)} - b_r^3 X_r^{(III)} \overline{X}_r + 3 b_r^2 X_r X_r^{(III)}$$
$$- 2 b_r^2 X_r^{(I)} X_r^{(II)} + b_r^2 X_r^{(II)} X_r^{(II)} \Big)$$

und nimmt man nun schliesslich das Integral zwischen den Grenzen o und l, so findet man

$$\int_o^l X_r^2 dx = \frac{1}{4} \Big(x X_r^2 + X_r \overline{X}_r^{(III)} - X_r^{(I)} \overline{X}_r^{(II)} \Big)_{x=o}^{x=l}$$

Durch wirkliche Substitution überzeugt man sich aber leicht, dass auch $\overline{X}_r^{(III)}$ und $\overline{X}_r^{(II)}$ für $x = o$ und $x = l$ verschwinden [1], und man hat alsdann

(15) $$\int_o^l X_r dx = \frac{l}{4} \Big(G_r e^{b_r l} + H_r e^{-b_r l} + J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l \Big)$$

[1]) Es ist nämlich

$$\overline{X}_r^{(II)} = G_r' e^{b_r x} + H_r' e^{-b_r x} - J_r' \cos b_r x - K_r' \sin b_r x$$
$$\overline{X}_r^{(III)} = G_r' e^{b_r x} - H_r' e^{-b_r x} + J_r' \sin b_r x - K_r' \cos b_r x$$

nach Gleichung 4) und 9) aber

$$J_r' = G_r' + H_r'; \quad K_r' = G_r' - H_r'$$
$$G_r' = b_r (e^{-b_r l} - \sin b_r l - \cos b_r l); \quad H_r' = b_r (e^{b_r l} + \sin b_r l - \cos b_r l)$$

Somit wäre der Werth dieses Integrales ermittelt. Will man es noch schliesslich auf die einfachere Form zurückbringen, in der es Herr Stefan auffand, so hat man zuerst aus den Gleichungen 5)

$$G_r e^{b_r l} + H_r e^{-b_r l} = J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l$$

und somit

$$G_r e^{bl} + H_r^{-b_r l} + J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l = 2 \left(J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l\right)$$

ferner hat man nach Gleichung 8)

$$\frac{J_r}{K_r} = \frac{G_r + H_r}{G_r - H_r} = \left(\frac{G_r}{H_r} + 1\right) : \left(\frac{G_r}{H_r} - 1\right) = \frac{\cos b_r l - \sin b_r l \mp 1}{\cos b_r l + \sin b_r l \pm 1}$$

Durch wirkliche Multiplication überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\cos b_r l - \sin b_r l \mp 1}{\cos b_r l + \sin b_r l \pm 1} = \frac{-\sin b_r l}{\cos b_r l \pm 1}$$

und es ist daher

$$\frac{J_r}{K_r} = \frac{-\sin b_r l}{\cos b_r l \pm 1}$$

hieraus folgt sogleich

$$J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l = \mp J_r$$

Man hat somit schliesslich

$$\int_0 X_r dx = l J_r^2 \qquad (16)$$